

総合職試験・一般職試験（大卒程度試験）・
障害者（係員級）採用試験（大卒程度試験）共通 数学

以下の4つの問題のうちから3つを選択して、解答用紙に解答を記入せよ。なお解答に当たっては、考え方や途中の計算などもなるべく詳しく記し、何らかの定理を用いた場合には、その名前や内容も明記すること。

以下、 \mathbf{R} は実数全体の集合とする。

問1 p, q, r, s を実数とし、 $A = \begin{pmatrix} p-1 & p+1 & q-6 \\ p+2 & p+2 & q-3 \\ p-4 & p & -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ r \\ s \end{pmatrix}$ とする。

(1) $p = q = 0$ のとき、行列 A の行列式 $\det(A)$ を求めよ。

(2) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を \mathbf{R}^3 内のベクトルとする。 \mathbf{x} を変数とする連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解全体のなす集合が \mathbf{R}^3 内の平面であるための p, q, r, s の必要十分条件を求めよ。また、その平面をパラメータ $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ を用いて表せ。

(3) 連立1次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ が解を持たないための p, q, r, s の必要十分条件を求めよ。

問2 以下の問いに答えよ。

(1) 2変数関数 $f(r, \theta) = r \cos \theta$ の偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial r}$ および $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ を求めよ。

(2) $\int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$ の積分値を求めよ。

(3) 平面 \mathbf{R}^2 上の重積分 $\iint_{\mathbf{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy$ の積分値を求めよ。

問3 以下の問いに答えよ。

- (1) $f: S \rightarrow T$ を集合 S から集合 T への写像とし, $\{A_i\}_{i \in I}$ を I を添え字の集合とする S の部分集合の族とする。包含関係

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

が成り立つことを示せ。

- (2) f を \mathbf{R} 上で定義された連続な実数値関数とする。次の2つの命題が同値であることを示せ。

(a) \mathbf{R} 上の任意の2つの开区間 A, B に対し, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つ。

(b) f は狭義増加関数, あるいは, 狭義減少関数である。

- (3) f を \mathbf{R} 上で定義された連続な実数値関数とする。次の2つの命題が同値であることを示せ。

(a) $A \cap B \neq \emptyset$ を満たす \mathbf{R} 上の任意の2つの开区間 A, B に対し, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ が成り立つ。

(b) f は増加関数, あるいは, 減少関数である。

ここで, 任意の $x < y$ に対し $f(x) < f(y)$ が成り立つとき f は狭義増加関数, $f(x) > f(y)$ が成り立つとき f は狭義減少関数であるという。また, 任意の $x < y$ に対し $f(x) \leq f(y)$ が成り立つとき f は増加関数, $f(x) \geq f(y)$ が成り立つとき f は減少関数であるという。

問4 表裏のあるコインを3枚同時に投げ, 表の出た枚数を数える。これを1回の試行とする。この試行を n 回行い, 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対し, i 回目の試行で出た表の枚数を a_i とする。

- (1) 積 $\prod_{i=1}^n a_i$ が正かつ4の倍数となる確率を n を用いて表せ。

- (2) 積 $\prod_{i=1}^n a_i$ が4以下となる確率を n を用いて表せ。

- (3) $n = 2$ のとき, (1) の事象と (2) の事象は独立か独立でないかを答えよ。証明も書くこと。