総合職試験・一般職試験（大卒程度試験）・
障害者（係員級）採用試験（大卒程度試験）共通　物理学

問題1～問題4の中から，3問選択して解答しなさい．

問題 1

α を正の定数として，中心力ポテンシャル

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{i}$$

における質量 m の質点の運動を考える．質点の位置座標を $\boldsymbol{r}$ として，$r = |\boldsymbol{r}|$ は原点 O からの距離である．以下の問に答えよ．

(1) 時間を t として，質点の運動量は $\boldsymbol{p} = m\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ と書ける．質点の角運動量 $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が保存することを示せ．

(2) 質点の運動が，原点を通るある平面（Σ とする）内に限定されることを説明せよ．

(3) 質点の位置を P とすると，線分 OP は平面 Σ 上を動いていく．線分 OP が微小時間 Δt の間に通過する領域の面積は，時間 t によらず一定となることを説明せよ．

(4) 平面 Σ を x-y 平面にとり，2 次元極座標 r, ϕ を導入する．x-y 平面上の質点の座標は，$x = r\cos\phi$，$y = r\sin\phi$ と書ける．$M = mr^2\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ により M を定義すると，M が一定となることを示し，$\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ を m, r, M, α を用いて表せ．

(5) 質点のエネルギーが取りうる値の範囲を求めよ．また，質点のエネルギーが正の場合と，負の場合とで質点の運動がどのように異なるかを説明せよ．なお，運動方程式の解は示さなくてよい．

問題 2

点 $\boldsymbol{r}_1$ に存在する点電荷 q_1 と点 $\boldsymbol{r}_2$ に存在する点電荷 q_2 の間に作用する力は，真空の誘電率を ε_0 とすると

$$\boldsymbol{F}_q = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} \tag{i}$$

と書ける．ただし，$\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ および $r_{12} = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ である．一方，領域 V_1 を流れる電流密度と領域 V_2 を流れる電流密度が存在し，領域 V_1 内の点 $\boldsymbol{r}_1$ における電流密度を $\boldsymbol{j}_1$，領域 V_2 内の点 $\boldsymbol{r}_2$ における電流密度を $\boldsymbol{j}_2$ として，これらの 2 つの電流密度の間に作用する力は，μ_0 を真空の透磁率として，次式で与えらえる．

$$\boldsymbol{F}_j = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_1}\mathrm{d}v_1\int_{V_2}\mathrm{d}v_2\frac{\boldsymbol{j}_1\times(\boldsymbol{j}_2\times\boldsymbol{r}_{12})}{r_{12}^3} \tag{ii}$$

ここで右辺における 2 つの積分は，dv_1 および dv_2 をそれぞれ領域 V_1 および領域 V_2 における無限小体積要素とする体積積分である．長さの次元を L，質量の次元を M，時間の次元を T として，以下の問に答えよ．

(1) 式 (i) で $4\pi\varepsilon_0 = 1$ とおく単位系において，電荷の次元が，L，M，T を用いてどのように表されるかを説明せよ．

(2) 式 (ii) で $\mu_0 = 4\pi$ とおくと，電流の 2 乗の単位と力の単位が等しくなることを説明せよ．

(3) 前問の単位系において，電流の単位アブアンペアを 1 アブアンペアの電流の 2 乗が 1 dyn $= 10^{-5}$ N（ニュートン）に等しいとして定義したとする．一方，電流の単位を A（アンペア）とする単位系では，μ_0 は 4π とは異なる値をとり，m（メートル）, kg（キログラム），s（秒）と電流の単位 A を用いて表される次元をもつ量となる．この電流の単位を A とする単位系において，1 アブアンペアが 10 A に等しいとしたとき，μ_0 の値を有効数字 3 桁で求めよ.（なお，ここでの μ_0 の定義は，2019 年の国際単位系の改定後の定義とは異なる.）

(4) 前問で求めた電流の単位を A とする単位系における μ_0 の値を用いて，ε_0 の値を有効数字 1 桁で求めよ．また，ε_0 の単位が F（ファラド）と m（メートル）を用いてどのように表せるかについても説明せよ．

(5) 一様な電流が流れている導体を考える．電流は，導体中の自由電子が，平均速度 $\boldsymbol{v}$ の運動をすることによって生じているとする．導体中の自由電子の電荷密度を ρ とすると，電流密度は

$$\boldsymbol{j} = \lambda\rho\boldsymbol{v} \tag{iii}$$

と書ける．$\mu_0 = 4\pi$ および $4\pi\varepsilon_0 = 1$ とする単位系において，λ の次元が L，M，T を用いてどのように表されるかを説明せよ．

問題 3

質量 m の粒子が，ω を正の定数として，ポテンシャル $V = \dfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$ のもとで，x 軸上を振動する．粒子の運動量演算子を p とすると，ハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \tag{i}$$

x と p の交換関係は，$[x, p] = xp - px = \mathrm{i}\hbar$ である．ここで，$\hbar$ は h をプランク定数として，$\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$ で与えられる．以下の問に答えよ．

(1) $[x, H]$ および $[p, H]$ を計算し，それぞれを x または p の 1 次式で表せ．

(2) $|n\rangle$ および $|\ell\rangle$ を系の固有状態として，これらの状態のエネルギーをそれぞれ ε_n，ε_ℓ とする．以下の式が成り立つことを示せ．

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_\ell)\langle \ell | x | n \rangle = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m}\langle \ell | p | n \rangle \tag{ii}$$

$$(\varepsilon_n - \varepsilon_\ell)\langle \ell | p | n \rangle = -\mathrm{i}\hbar m\omega^2 \langle \ell | x | n \rangle \tag{iii}$$

(3) 演算子 A を，$A = x + \dfrac{\mathrm{i}}{m\omega}p$ によって定義する．系の固有状態に A を作用させると，エネルギーが $\hbar\omega$ だけ低い状態が生成されることを説明せよ．

(4) $A^\dagger A$ をハミルトニアン H と m,ω,$\hbar$ を用いて表し，基底状態のエネルギーが，$\dfrac{1}{2}\hbar\omega$ であることを示せ．なお，$A^\dagger$ は A のエルミート共役演算子である．

(5) 系の励起状態が，基底状態と $A^\dagger$ を用いてどのように表されるかを説明せよ．なお，波動関数の規格化定数は求めなくて良い．

問題 4

N 個の格子点からなる 3 次元立方格子の各格子点に，大きさ S のスピンが存在し，最隣接のスピン間に強磁性的な相互作用が存在する系を考える．ハミルトニアンは次式で与えられる．

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j \tag{i}$$

J は正の定数で，$\langle i,j \rangle$ についての和は，最隣接の 2 つの格子点の組すべてについての和を表す．$\boldsymbol{S}_j = \left(S_j^x, S_j^y, S_j^z \right)$ は j 番目の格子点におけるスピンである．この系における強磁性相転移を平均場近似で考える．ボルツマン定数を k_{B} として，以下の問に答えよ．

(1) スピンの量子化軸を z 軸にとると，S_i^z がとりうる値は，$S_i^z = -S, -S+1, ..., S$ である．平均場近似では，各スピンと相互作用する $\zeta = 6$ 個のスピンを，いずれも期待値 $\langle \boldsymbol{S}_j \rangle \equiv (0, 0, m)$ で置き換える．このとき，平均場近似のハミルトニアンが次式で与えられることを説明せよ．

$$H_{\mathrm{MF}} = -\zeta m J \sum_{j=1}^{N} S_j^z + \frac{1}{2} \zeta N J m^2 \tag{ii}$$

(2) 系は熱浴に接しており温度 T の熱平衡状態にあるとする．系の分配関数を，m を含む式で表せ．

(3) 平均場近似のもとでは，スピンの期待値は格子点に依存しない．スピンの期待値を m を含む式で表せ．

(4) 平均場近似での強磁性相転移温度を求めよ．ただし，$|x| \ll 1$ の場合に成り立つ以下の近似式を用いてよい．

$$\frac{2S+1}{2S} \coth \left(\frac{2S+1}{2S} x \right) - \frac{1}{2S} \coth \left(\frac{x}{2S} \right) \simeq \frac{S+1}{3S} x \tag{iii}$$

(5) 絶対零度および高温極限において，系のエントロピーはそれぞれどのように表せるか．その結果を示し，物理的解釈を述べよ．