総合職試験　数学

以下の 3 つの問題のうちから 1 つを選択して, 解答用紙に解答を記入せよ. なお解答に当たっては, 考え方や途中の計算などもなるべく詳しく記し, 何らかの定理を用いた場合は, その名前や内容も明記すること.

以下, $\mathbb{R}$ を実数全体の集合とする.

問 5 n を 1 以上の整数として, S_n を n 次の対称群とする. また $A_n \subset S_n$ を n 次の交代群とする.

(1) A_n が S_n の正規部分群であることを示せ.

(2) A_n がアーベル群となるような n を全て求めよ.

(3) n が 3 以上のとき, A_n は長さが 3 の巡回置換によって生成されることを示せ.

問 6 $X = \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z})^2$ を 2 次元トーラスとし, $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を 2 次元球面とする. 写像 $f : X \to S^2$ を

$$f([(\theta, \phi)]) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

と定義する. ただし $[(\theta, \phi)]$ は $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$ が代表する X の点である.

(1) f の像が実際に S^2 に含まれることを示せ.

(2) f は全射かどうか, 単射かどうかを答えよ.

(3) f の微分 $df_p : T_pX \to T_{f(p)}S^2$ が全単射とならない点 $p \in X$ を全て求めよ. また, そのような点 p において $\mathrm{Ker}\,(df_p)$, $\mathrm{Im}\,(df_p)$ を求めよ. ただし可微分多様体 M に対して, T_xM は M の $x \in M$ における接ベクトル空間を表すものとする.

問 7 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ とおく. 以下では閉曲線の向きは反時計回りとして, 問に答えよ.

(1) f を次の領域上でローラン展開せよ.

(i) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, 0 < |z| < 1\}$　　(ii) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 1\}$

(2) C を次の閉曲線としたとき, $\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$ を求めよ.

(i) $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = \frac{1}{2}\}$　　(ii) $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 2\}$

(3) n, m を 1 以上の整数として，α, β を相異なる複素数とする． このとき $R > \max\{|\alpha|, |\beta|\}$ に対して $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-\alpha)^n(z-\beta)^m}$ を求めよ．